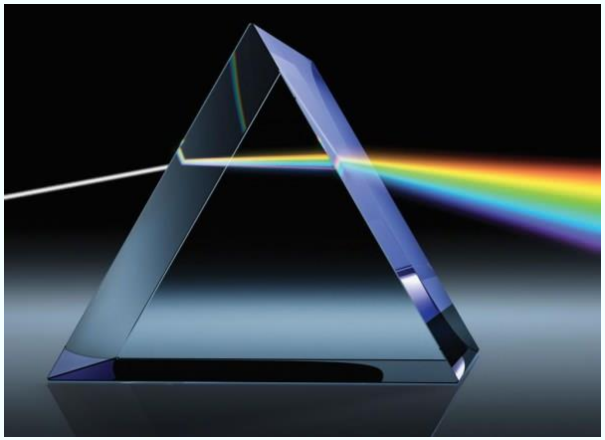
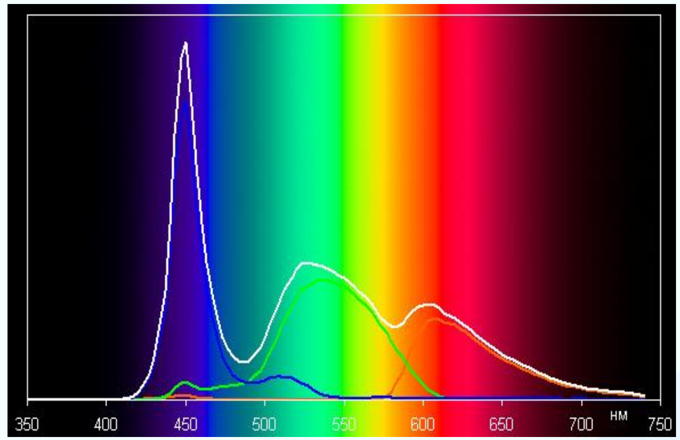
СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ





Бекетаева Асель Орозалиевна

Лекция 1. Тригонометрическая система на отрезке

Пространство функций $L_2[-\pi,\pi]$. Ортогональность системы функций. Полнота системы. Ортогональность проверяется непосредственно, а полнота следует из теоремы Вейерштрасса об аппроксимации любой непрерывной периодической функции тригонометрическими многочленами

Тригонометрическая $1,\ cos(nx),\ sin(nx), n = 1,2,3,4,\ldots$ система образует полную ортогональную систему в этом пространстве.

Вопросами приближения функций тригонометрическим функциями занимались еще с 1740 г. Бернулли, Даламбер, Лагранж; Эйлер. Фурье в 1811 г. выразил уверенность в возможности такого представления, а в его книге 1822 г. привел множество примеров примения разложения в тригонометрический ряд.

Ряд Фурье сходится в метрике $L_2\,[-\pi, \pi]$.

Ортогональные системы на отрезке $[0, \pi]$, $[a,b]$,$[0,1]$

Виды сходимости и условия сходимости ряда Фурье.

Рассмотрим различные виды сходимости, в которых исследуется сходимость ряда Фурье. Практически важными являются условия сходимости ряда Фурье в точке и в других метриках:

- Суммируем по Чезаро в среднем
- Сходимость в метрике L_p
- Равномерно суммируем по Чезаро.
- Слабая сходимость.

Условие поточечной сходимости дается теоремой:

Если f суммируемая функция и при фиксированном x и некотором $\delta>0$ интеграл $$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt$$

существует (условие Дини), то частичные суммы ряда Фурье функции сходятся в этой точке x к f (x).

- Более общая формулировка:

Пусть f –ограниченная функция с периодом 2π, имеющая разрывы лишь первого рода и пусть f имеет в каждой точке левую и правую производные. Тогда ее ряд Фурье сходится всюду, а его сумма равна $f(x)$ в точках непрерывности и равна

$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$ в точках разрыва.

Имеет место равенство Парсеваля - для ортонормированной системы, а для ненормированной системы выполнено неравенство Бесселя